

**CONTROL VARIANTE EN EL TIEMPO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES  
SUBACTUADOS**

**VICTOR EDUARDO ARDILA LINDO**

**C.C. 1.093.220.801**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**

**FACULTAD DE INGENIERÍAS**

**MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**PEREIRA-RISARALDA**

**2018**

**CONTROL VARIANTE EN EL TIEMPO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES  
SUBACTUADOS**

**VICTOR EDUARDO ARDILA LINDO**

**C.C. 1.093.220.801**

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de  
Magister en Ingeniería Eléctrica**

**DIRECTOR**

**Ph.D. Eduardo Giraldo Suárez**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**

**FACULTAD DE INGENIERÍAS**

**MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**PEREIRA-RISARALDA**

**2018**

## ÍNDICE GENERAL

<b>RESUMEN.....</b>	<b>7</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>8</b>
<b>Objetivo general.....</b>	<b>10</b>
<b>Objetivos específicos.....</b>	<b>10</b>
<b>1. Modelo matemático del sistema multivariable subactuado .....</b>	<b>11</b>
1.1 Péndulo invertido de rotación .....	11
1.2 Ecuaciones del sistema .....	12
1.3 Modelo no-lineal .....	17
1.4 Modelo lineal.....	17
<b>2. Métodos de identificación .....</b>	<b>19</b>
2.1 Identificación fuera de línea .....	19
2.2 Esquemas de identificación en línea .....	20
2.3 Métodos de Error de Ecuación para el Sistema Determinista.....	21
2.3.1 Proyección. ....	21
2.3.2 Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR).....	22
<b>3. Control por realimentación en espacio de estados .....</b>	<b>24</b>
3.1 Representación por Pseudoestados .....	24
3.1 Control en espacio de estados .....	25
3.2 Regulación de estados .....	25
3.3 Seguimiento de referencia .....	26
3.3.1 Seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo .....	26
3.3.2 Seguimiento de referencia por acción integral .....	29
<b>4. Resultados y Análisis .....</b>	<b>32</b>
4.1 Estimación del sistema y simulación de controladores .....	33
4.1.1 Identificación por proyección y control en espacio de estados .....	33
4.1.2 Identificación por MCR y control por espacio de estados .....	37
4.2 Identificación por Mínimos Cuadrados Recursivos y control en espacio de estados en tiempo real .....	39

4.3 Validación de resultados.....	43
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>49</b>
<b>Apéndice A .....</b>	<b>50</b>
<b>Apéndice B .....</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice C .....</b>	<b>52</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>53</b>

## Lista de Figuras.

Figura 1. Modelo tridimensional del péndulo invertido de rotación. [5] .....	12
Figura 2. Diagrama de bloques para la regulación de estados. [10] .....	26
Figura 3. Diagrama de bloques para el seguimiento de referencia con ganancia en lazo directo. [10] .....	27
Figura 4. Diagrama de bloques para el seguimiento de referencia con acción integral. [10] .....	29
Figura 5. Péndulo invertido rotacional. Fuente: Autor. ....	33
Figura 6. Identificación por proyección. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	34
Figura 7. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	35
Figura 8. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	36
Figura 9. Identificación por mínimos cuadrados recursivos. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	37
Figura 10. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral prueba 2. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	38
Figura 11. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral prueba 2. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	39
Figura 12. Respuesta en tiempo real del sistema multivariable subactuado con control en espacio de estados con seguimiento por lazo directo. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	40
Figura 13. Respuesta en tiempo real del sistema multivariable subactuado con control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor. ....	42
Figura 14. Control Fuzzy sobre el péndulo invertido rotacional. [14] .....	43
Figura 15. Control híbrido para un péndulo rotacional. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. [15] .....	44
Figura 16. Control híbrido aplicado a un sistema de péndulo invertido rotacional. a) Angulo del péndulo. b) Angulo de la base. [16] .....	45
Figura 17. Modelo robusto de control predictivo para el sistema de péndulo invertido de rotación. a) Angulo del péndulo. b) Angulo de la base. [17] .....	46
Figura 18. Control adaptativo por realimentación de estados de un puente de grúa. a) Carro transversal. b) Péndulo. [18] .....	46

## Índice de tablas

Tabla 1. Polos deseados para el control en espacio de estados con seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo. ....	35
Tabla 2. Polos deseados para el control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral.....	36
Tabla 3. Polos deseados para el controlador en espacio de estados con seguimiento por lazo directo en tiempo real .....	40
Tabla 4. Pruebas control en espacio de estados con seguimiento de referencia por lazo directo.....	41
Tabla 5. Polos deseados para el control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral.....	41
Tabla 6. Pruebas control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral.....	42

## RESUMEN

En este proyecto de grado, se describen procesos de identificación y control multivariable de un péndulo invertido rotacional. Modelos en espacio de estados que describen la dinámica completa sistema en tiempo discreto, son obtenidos a partir de los algoritmos de identificación que tienen en cuenta los comportamientos de entradas/salidas para encontrar dicho modelo el cual describe el sistema real. Estas representaciones se obtienen mediante el uso de métodos de identificación, tales como los Métodos de Regresión Lineal (Algoritmo de proyección y Algoritmo de mínimos cuadrados recursivos).

Se selecciona una estructura de control en espacio de estados con una representación por Pseudoestados. Gracias a la representación utilizada existe el conocimiento de todos los estados de la planta multivariable, por lo que solo se debe calcular la ganancia de regulación de estados y la ganancia de seguimiento para garantizar que la ley de control logre que el error de seguimiento de trayectorias converja a cero.

Se aplica la metodología propuesta para la identificación y control en espacio de estados multivariable aplicado a un péndulo invertido rotacional, sobre el sistema simulado y también sobre el sistema real.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas subactuados son sistemas con mayor número de salidas que de entradas, en otras palabras, son aquellos que tienen más grados de libertad que actuadores, donde generalmente se controlan los grados de libertad que carecen de actuador. Algunos ejemplos de los sistemas subactuados son sistemas mecánicos pendulares, manipuladores robóticos, gran variedad de vehículos no tripulados UAV.

Los sistemas subactuados suelen tener menores grados de libertad controlables que grados de libertad totales, también llamados no holonómicos. [1] Este tipo de sistemas son un reto, ya que se hace más complejo el control en la medida en que aumente la diferencia entre el número de salidas y entradas. Adicionalmente se caracterizan por su no linealidad que genera otro reto de diseño tanto de los observadores como de los controladores y del método de identificación, los cuales están interrelacionados entre sí. [2]

Uno de los problemas principales en los sistemas subactuados es el hecho de no haber una respuesta general a la pregunta de cuándo un control adaptativo con realimentación en la salida puede solucionar el control de sistemas mecánicos subactuados. Esto implica que el diseño de un controlador no siempre podrá funcionar dado que, en gran cantidad de casos, el tiempo de procesamiento necesario será demasiado alto para lograr un sistema de control que funcione en tiempo real.

Múltiples técnicas de control han sido implementadas en sistemas mecánicos subactuados, un claro ejemplo es [3] el cual es un sistema de control desarrollado para un vehículo aéreo no tripulado con incertidumbre de masa, siendo un sistema de control diseñado para un sistema subactuado que solo garantiza su estabilidad realizando cálculos en tiempo real para el vehículo no tripulado con masa desconocida y demás parámetros conocidos. Siendo este un control para un modelo específico.

Se han desarrollado técnicas de control adaptativo como en [4] donde los parámetros son desconocidos utilizando reguladores autoajustables, siendo un método flexible, pero en muchos casos, métodos computacionalmente irrealizables y sin posibilidad de realizar pruebas de estabilidad en el sistema.

Nuevas técnicas que permitan que un sistema mecánico pueda ser controlado y realizable en tiempo real son necesarias para lograr la estabilización y seguimiento de trayectorias de manera simultánea.



Los sistemas de control adaptativo permiten realizar el ajuste de parámetros de un sistema identificado algún cambio en el sistema mecánico. Además, es posible realizar procesos como matrices de desacople o reducción para disminuir el tiempo de procesamiento del sistema de control y estimación de parámetros (costo computacional).

## **Objetivo general**

Diseñar un sistema de control variante en el tiempo para sistemas multivariable subactuados de 2 salidas, 1 entrada y de orden 3, basados en una representación en espacio de estados extendida que permita ser implementado en tiempo real.

## **Objetivos específicos**

- Plantear técnicas de estimación multivariable de parámetros para sistemas multivariados con menor número de entradas que de salidas.
- Plantear modelos de control multivariable en espacio de estados aplicado sobre sistemas multivariados subactuados y acoplarlos con las técnicas de estimación multivariable.
- Plantear técnicas de reducción de costo computacional que permitan la implementación de los controladores en tiempo real.

# Capítulo 1

## 1. Modelo matemático del sistema multivariable subactuado

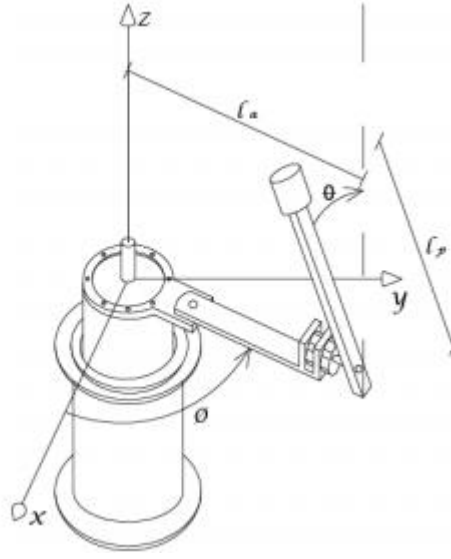
A continuación se presenta una descripción matemática de un péndulo invertido de rotación en donde se muestran las ecuaciones que rigen el comportamiento de los diferentes elementos del sistema y los parámetros generales de operación.

### 1.1 Péndulo invertido de rotación

El péndulo invertido de rotación que se muestra en la Figura 1, consta de dos cuerpos inerciales conectados. Un bloque central con momento de inercia  $J$ , rígidamente conectado a un brazo horizontal de longitud  $l_a$  y masa homogéneamente distribuida en la línea  $ma$ . [5]

El péndulo de longitud  $l_p$  y masa homogéneamente distribuida en línea  $mp$ . El ángulo del péndulo  $\theta$  ha sido definido como cero en la posición vertical arriba, y positivo, cuando el péndulo se mueve en la dirección de las manecillas del reloj. El ángulo del brazo  $\phi$ , se ha definido positivo cuando el brazo se mueve en la dirección contraria a las manecillas del reloj. [5]

Este mecanismo permite la aplicación y prueba de algoritmos de control sobre sistemas no lineales que pueden ser usados en sistemas mecatrónicos más complejos (posibles aplicaciones en las áreas de robótica, navegación autónoma, sistemas de control de posición, etc).



**Figura 1. Modelo tridimensional del péndulo invertido de rotación. [5]**

## 1.2 Ecuaciones del sistema

Para determinar las ecuaciones del sistema se tiene que la posición de un punto P sobre el péndulo puede ser descrito con el siguiente vector de posición: [5]

$$r(r_a, r_p) = (r_x(r_a, r_p), r_y(r_a, r_p), r_z(r_a, r_p))^T \quad (1.1)$$

Con

$$\begin{aligned} r_x(r_a, r_p) &= r_a \cdot \cos\phi - r_p \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \\ r_y(r_a, r_p) &= r_a \cdot \sin\phi + r_p \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \\ r_z(r_a, r_p) &= r_p \cos\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Siendo  $r_a$  la posición radial del brazo, y  $r_p$  es la posición radial del péndulo.

Las distancias son medidas desde el centro de rotación, tomando derivadas respecto al tiempo de (1.1) se obtiene una expresión para la velocidad.

$$v(r_a, r_p) = (v_x(r_a, r_p), v_y(r_a, r_p), v_z(r_a, r_p))^T \quad (1.3)$$

Un punto P sobre el péndulo, con

$$\begin{aligned}
 v_x(r_a, r_p) &= -r_a \cdot \sin\phi \cdot \dot{\phi} - r_p \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi \cdot \dot{\theta} - r_p \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \dot{\phi} \\
 v_y(r_a, r_p) &= r_a \cdot \cos\phi \cdot \dot{\phi} + r_p \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \dot{\theta} - r_p \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \dot{\phi} \\
 v_z(r_a, r_p) &= -r_p \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

De esta manera se expresa el cuadrado de la magnitud de la velocidad de P.

$$v^2(r_a, r_p) = (r_a^2 + r_p^2 \cdot \sin^2 \theta) \cdot \dot{\phi}^2 + 2 \cdot r_a \cdot r_p \cdot \cos \theta \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} + r_p^2 \cdot \dot{\theta}^2 \tag{1.5}$$

Realizando el análisis energético del sistema, se tiene que las energías que presenta un cuerpo (Energía cinética y Energía potencial), deben ser conocidas para desarrollar el modelo energético del sistema y pueden ser calculadas de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm \tag{1.6}$$

$$V = g \int r_z dm$$

Los parámetros  $T$  y  $V$  representan las energías cinética y potencial,  $dm$  denota el diferencial de masa y  $g$  la gravedad.

Para determinar la energía total del sistema, se divide en tres partes, calculando las respectivas energías para cada una de ellas.

- Centro de rotación:

La energía potencial gravitacional es cero, ya que el centro de rotación se encuentra en el origen de las coordenadas.

$$\begin{aligned}
 2T_c &= J \dot{\phi}^2 \\
 V_c &= 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

- Brazo horizontal:

Al igual que en el pilar central, la energía gravitacional de la barra horizontal es cero, ya que se encuentra ubicado sobre el plano xy.

$$2T_c = \int_0^{l_a} \frac{v^2(s, 0)m_a}{l_a} ds \quad (1.8)$$

$$T_c = \frac{1}{6}m_al_a^2\dot{\phi}^2$$

$$V_a = 0 \quad (1.9)$$

- Brazo vertical:

Para el brazo vertical tenemos unas ecuaciones definidas por (1.10) y (1.11).

$$2T_p = \int_0^{l_p} v^2(r_a, s)m_p / l_p ds \quad (1.10)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \left[ m_p \left( l_a^2 + \frac{1}{3} l_p^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\phi}^2 + m_p l_a l_p \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{1}{3} m_p l_p^3 \dot{\theta}^2 \right]$$

$$V_p = g \int_0^{l_p} r_z(l_a, s) m_p / l_p ds \quad (1.11)$$

$$V_p = \frac{1}{2} m_p l_p g \cos \theta$$

Formulando la mecánica de Lagrange, que describe el comportamiento de las posiciones y velocidades angulares de un sistema.

$$L = T - V \quad (1.12)$$

Las siguientes ecuaciones de movimiento describen el comportamiento del sistema físico en función de sus fuerzas y el torque:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_{\phi} \quad (1.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_{\phi}$$

Donde  $L$  representa el Lagrangiano del sistema, y  $\tau_{\phi}$  el torque externo aplicado al brazo horizontal, las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left( J + \left( \frac{1}{3} m_a + m_p \right) l_a^2 + \frac{1}{3} m_p l_p^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\phi} + \frac{1}{2} m_p l_a l_p \cos \theta \dot{\theta} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{3} m_p l_p^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} m_p l_a l_p \sin \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_p g l_p \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m_p l_a l_p \cos \theta \dot{\phi} + \frac{1}{3} m_p l_p^2 \dot{\theta}$$

Para simplificar esta ecuación se declaran unas constantes en función de los mismos parámetros de la planta, como se muestra en el sistema de ecuaciones (1.14).

$$\alpha = J + \left( \frac{1}{3} m_a + m_p \right) l_a^2$$

$$\beta = \frac{1}{3} m_p l_p^2$$

$$\gamma = \frac{1}{2} m_p l_a l_p \quad (1.15)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} m_p l_a l_p$$

$$\delta = \frac{1}{2} m_p g l_p$$

Al aplicar estos términos resultan las ecuaciones que describen en forma diferencial el comportamiento global para el sistema del péndulo rotacional:

$$(\alpha + \beta \sin^2 \theta) \ddot{\phi} + \gamma \cos \theta \ddot{\theta} + 2\beta \cos \theta \sin \theta \dot{\phi} \dot{\theta} - \gamma \sin \theta \dot{\theta}^2 = \tau_\phi \quad (1.16)$$

$$\gamma \cos \theta \ddot{\phi} + \beta \theta - \beta \cos \theta \sin \theta \ddot{\phi}^2 - \delta \sin \theta = 0$$

También se debe tener en cuenta el modelo del motor de corriente continua, el cual es el elemento activo encargado de imprimir el movimiento o giro al sistema físico, para nuestro péndulo invertido de rotación es necesario determinar las características físicas del circuito de un motor de corriente continua y así encontrar la relación entre las variables mecánicas y las variables eléctricas.

El circuito equivalente para un motor de corriente continua se observa en la siguiente ecuación en función del voltaje, la corriente continua y la velocidad de giro de su eje:

$$V = R \cdot I + L \frac{di}{dt} + K_e \cdot \phi \quad (1.17)$$

Donde  $R$ ,  $L$  y  $K_e$  son las constantes eléctricas del motor y despreciando el efecto inductivo, de la anterior ecuación se puede hallar la corriente circulante,

$$i = \frac{1}{R} v - \frac{k_e}{R} \dot{\phi} \quad (1.18)$$

Sabiendo que en un motor el torque de la salida es proporcional a la corriente que circula por sus devanados, tenemos:

$$\tau_\phi = k_e i \quad (1.19)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la corriente y considerando que  $K_e = K_e$ .

Debido a que en los motores de corriente continua estas magnitudes son casi idénticas, se toman con el mismo valor y se determina la relación existente entre el torque de la salida y la tensión continua aplicada en el motor, con la siguiente ecuación:



$$\tau_\phi = \frac{K_t}{R} v - \frac{K_t^2}{R} \dot{\phi} \quad (1.20)$$

### 1.3 Modelo no-lineal

Teniendo el modelo matemático no lineal presentado en (1.16) para el péndulo, es posible construir una representación en espacio de estados no lineal con ecuaciones diferenciales de primer orden. Se introducen las variables de estado  $x_1 = \phi, x_2 = \dot{\phi}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$  y se determina el siguiente espacio de estados no lineal el cual representa el comportamiento del sistema físico en cualquier punto de operación. [5]

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\beta\gamma(\sin^2 x_3 - 1) \sin x_3 x_2^2 - 2\beta^2 \cos x_3 \sin x_3 x_2 x_4 + \beta \gamma \sin x_3 x_4^2 - \gamma\delta \cos x_3 \sin x_3 + \beta\tau_\phi}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3}$$

(1.21)

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\beta(\alpha + \beta \sin^2 x_3) \cos x_3 \sin x_3 x_2^2 + 2\beta\gamma(1 - \sin^2 \theta) \sin x_3 x_2 x_4 - \gamma^2 \cos x_3 \sin x_3 x_4^2 + \delta(\alpha + \beta \sin^2 x_3) \sin x_3 x_3 - \gamma \cos x_3 \tau_\phi}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3}$$

### 1.4 Modelo lineal

Para obtener el modelo lineal se tienen como puntos de equilibrio del sistema  $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0)$ , y se obtienen los parámetros de la planta en función de las constantes del sistema físico. [5]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{\delta\gamma}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\gamma^2 K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{-\delta\alpha}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta K_t^2 \\ R(\gamma^2 - \beta\alpha) \\ 0 \\ \gamma K_t^2 \\ R(\gamma^2 - \beta\alpha) \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

# Capítulo 2

## 2. Métodos de identificación

El algoritmo de identificación de parámetros es una parte importante de los sistemas de control variantes en el tiempo. Este consiste en adquirir una representación matemática de la planta a partir de observaciones obtenidas directamente del propio sistema que se pretende modelar. Esto con el propósito de que los parámetros de control diseñados sean robustos y permitan seguir y estabilizar el sistema durante todo el tiempo de funcionamiento. [6]

Existen varias formas para realizar la identificación de un sistema, pero de forma más general se pueden distinguir dos categorías: identificación en línea e identificación fuera de línea.

### 2.1 Identificación fuera de línea

En este caso se toman los datos de las variables medidas y se consignan en matrices, para después ajustar el modelo haciendo uso de estas. [7]

Suponga una función de transferencia de  $n$  orden de la forma:

$$y[k] = \frac{\beta_0 q^{-1} + \beta_1 q^{-2} + \dots + \beta_{n-1} q^{-n}}{1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2} + \dots + \alpha_n q^{-n}} u[k] \quad (2.1)$$

La cual es expresada como una ecuación en diferencias:

$$y[k] = -\alpha_1 y[k-1] - \dots - \alpha_n y[k-n] + \beta_0 u[k-1] + \dots + \beta_{n-1} u[k-n] \quad (2.2)$$

Expresando la ecuación (2.2) en forma vectorial se obtiene:

$$y[k] = [-y[k-1] \quad \cdots \quad -y[k-n] \quad u[k-1] \quad \cdots \quad u[k-n]] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La ecuación (2.4) muestra el sistema (2.3) de manera simplificada.

$$B = AX \quad (2.4)$$

Donde los valores de A y B son datos medidos experimentalmente de las entradas y salidas de la planta, mientras que X corresponde a los parámetros desconocidos del sistema.

Haciendo uso del método de mínimos cuadrados se puede despejar X como se muestra en la ecuación (2.5).

$$\begin{aligned} A^T B &= A^T A X \\ X &= (A^T A)^{-1} A^T B \end{aligned} \quad (2.5)$$

Una vez obtenidos los valores de X, se procede a reconstruir la función de transferencia (2.1).

## 2.2 Esquemas de identificación en línea

En este método de identificación, la estimación de parámetros del sistema se realiza con las medidas obtenidas en tiempo real, actualizando los parámetros de la planta en el intervalo de tiempo entre muestras sucesivas. Una clase particular de algoritmos en línea muy utilizada en la práctica es cuando la identificación de parámetros actual,  $\hat{\theta}[k]$ , es calculada en términos de la identificación anterior,  $\hat{\theta}[k-1]$ , de la siguiente manera: [8][9]

$$\hat{\theta}[k] = f(\hat{\theta}[k-1], D[k], k) \quad (2.6)$$

Donde  $D[k]$  expresa los datos disponibles en la muestra  $k$ , y  $f(.,.,.)$  indica una función algebraica, cuya forma determina el algoritmo específico. En el caso de los sistemas dinámicos, los datos,  $D[k]$ , son las observaciones actuales y anteriores de las salidas y entradas del sistema, que expresamos como:

$$y[k] \triangleq \{y[k], y[k-1], \dots\} \text{ y } u[k] \triangleq \{u[k], u[k-1], \dots\} \quad (2.7)$$

Una forma especial de (2.6) utilizada en la práctica está dada por:

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + M[k-1]\bar{\phi}[k-d]\bar{e}[k] \quad (2.8)$$

Dónde:

$\hat{\theta}[k]$  Es un vector que representa los parámetros identificados en la muestra  $k$ .

$M[k-1]$  Expresa una ganancia del algoritmo (posiblemente una matriz).

$\bar{\phi}[k-d]$  Indica un vector de regresión de algún tipo compuesto de elementos seleccionados de  $y[k-d], u[k-d]$ ;  $d$  es un entero.

$\bar{e}[k]$  Muestra un error de modelado de algún tipo (el error de predicción del modelo derivado del uso de  $\hat{\theta}[k-1]$ ).

La ecuación representada en (2.8) puede ser motivada por muchas funciones objetivas diferentes, también depende de los significados precisos de  $\hat{\theta}[k]$ ,  $M[k]$ ,  $\bar{\phi}[k]$  y  $\bar{e}[k]$ , dado esto el algoritmo puede tener muchas formas diferentes.

### 2.3 Métodos de Error de Ecuación para el Sistema Determinista

Basado en el modelo DARMA que se presenta en el apéndice A, mediante el cual se tienen una representación de parámetros lineales, se muestran los dos algoritmos de identificación en línea representados en las subsecciones 2.3.1 y 2.3.2 utilizados para realizar la estimación de los parámetros de la planta de forma lineal. [8]

#### 2.3.1 Proyección.

El algoritmo de proyección resulta de encontrar  $\hat{\theta}[k]$  a partir de los datos conocidos  $\hat{\theta}[k-1]$  y  $y[k]$  que minimizan la función de costo: [9]

$$J = \frac{1}{2} \|\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1]\|^2 \quad (2.9)$$

El problema está sujeto a

$$y[k]^T = \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k] \quad (2.10)$$

Para encontrar la solución a este problema de optimización se introducen los multiplicadores de Lagrange, de esta forma se obtiene:

$$J_c = \frac{1}{2} \|\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1]\|^2 + \lambda [y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]] \quad (2.11)$$

El mínimo se encuentra cuando las derivadas parciales de (2.11) son iguales a cero, esto es:

$$\frac{\partial J_c}{\partial \hat{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial J_c}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.12)$$

De donde se obtiene:

$$\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1] - \lambda \phi[k-1] = 0 \quad (2.13)$$

$$y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1] = 0 \quad (2.14)$$

Reemplazando (2.13) en (2.14), de forma que:

$$y[k]^T - \phi[k-1]^T [\hat{\theta}[k-1] + \lambda \phi[k-1]] = 0 \quad (2.15)$$

Resolviendo (2.15) en función de  $\lambda$ , se tiene:

$$\lambda = \frac{y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]}{\phi[k-1]^T \phi[k-1]} \quad (2.16)$$

Por último, sustituyendo (2.16) en (2.13) se encuentra la solución al problema de optimización y con ello la ecuación resultante es:

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \frac{\phi[k-1]}{\phi[k-1]^T \phi[k-1]} (y[k-1] - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]) \quad (2.17)$$

Para evitar una posible división por cero, se adiciona una pequeña cantidad  $c$  al denominador del algoritmo.

### 2.3.2 Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR).

La estimación basada en mínimos cuadrados recursivos, tiene la forma: [8]

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \frac{P[k-1]\phi[k-1]}{1 + \phi[k-1]^T P[k-1] \phi[k-1]} (y[k] - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]) \quad (2.18)$$

$$k \geq 1$$

Donde  $\phi$  y  $\hat{\theta}$  corresponden a  $A$  y  $X$  de la ecuación (2.4) respectivamente. Mientras que  $P[k-1]$  es cualquier matriz positiva definida y  $P[k]$  será calculada de la forma:

$$P[k] = P[k-1] - \frac{P[k-1]\phi[k-1]\phi[k-1]^T P[k-1]}{1 + \phi[k-1]^T P[k-1] \phi[k-1]} \quad (2.19)$$

$$k \geq 1$$

Se observa que la estimación de mínimos cuadrados recursivos tiene la forma (2.8). A continuación se muestra que la ecuación de identificación de parámetros basada en este método resulta de la minimización de la siguiente función de costo cuadrático:

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (y[k] - \phi[k-1]^T \theta)^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}(0)) \quad (2.20)$$

Básicamente, la función de costo (2.20) representa la suma de los errores cuadráticos:

$$e[k] = y[k] - \phi[k-1]^T \theta \quad (2.21)$$

Donde tenemos la diferencia del valor real  $y[k]$  y el valor estimado por el algoritmo con el vector de parámetro  $\theta$ , y el resto de la función esta dado para tener en cuenta la condiciones iniciales.

El algoritmo de mínimos cuadrados representado en las ecuaciones (2.18) y (2.19) generalmente converge mucho más rápido que el algoritmo de estimación por proyección y es menos sensible al ruido comparado con la estimación basada en proyección y proyección ortogonal. [8]

# Capítulo 3

## 3. Control por realimentación en espacio de estados

En este capítulo se concentra toda la contextualización para el diseño de los controladores variantes en el tiempo basados en un modelo de espacio de estados que se usaron en el desarrollo del proyecto.

### 3.1 Representación por Pseudoestados

Se considera un sistema MIMO lineal e invariante representado en su forma DARMA, este modelo se representa de la forma: [10][11][12]

$$y[k] = \theta^T \phi[k] \quad (3.1)$$

La ecuación (3.2) relaciona el vector  $\phi[k]$  con  $\phi[k - 1]$  y  $u[k]$ .

$$\phi[k] = \begin{bmatrix} -A_1 & \dots & -A_n & B_1 & \dots & B_m \\ I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix} \phi[k - 1] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) se puede interpretar como un modelo en espacio de estados, donde los estados del sistema son los elementos que componen el vector  $\phi[k - 1]$ , si se toma  $x_a[k]$  como el vector de estados, es decir,  $x_a[k] = \phi[k - 1]$  se tiene el siguiente modelo de espacio de estados.



$$x_a[k+1] = \begin{bmatrix} -A_1 & \dots & -A_n & B_1 & \dots & B_m \\ I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix} x_a[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \quad (3.3)$$

$$y[k] = \theta^T x_a[k] \quad (3.4)$$

El modelo representado en (3.3) y (3.4) se conoce como modelo por Pseudoestados, este modelo presenta una ventaja frente a otros a la hora de desarrollar una metodología de control dado el conocimiento completo de los estados, por tanto se hace innecesario el cálculo de un observador.

### 3.1 Control en espacio de estados

Se define un modelo de representación de la forma: [10]

$$x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \quad (3.5)$$

$$y[k] = Cx[k] \quad (3.6)$$

Para diseñar un controlador en espacio de estados se necesita verificar que el sistema sea controlable. El sistema representado en la ecuaciones (3.5) y (3.6) es controlable, si es posible encontrar una secuencia de control tal que el origen ( $x[k] = 0$ ) pueda ser alcanzado desde cualquier estado inicial en un tiempo finito.

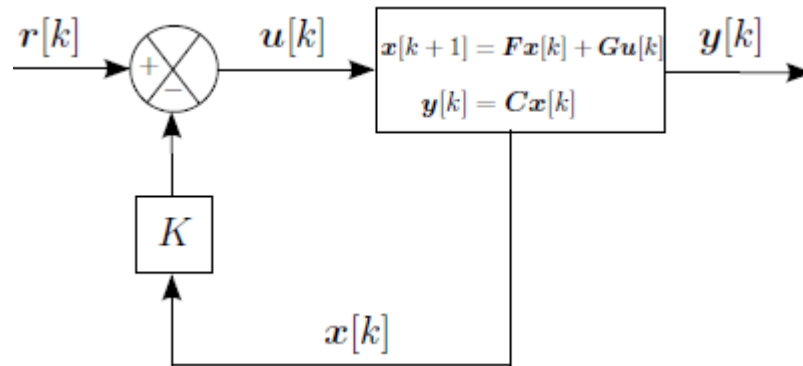
Se define la matriz de controlabilidad como:

$$w_c = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G] \quad (3.7)$$

Además se puede decir que el sistema (3.5) y (3.6) es alcanzable si y solo si la matriz  $w_c$  es de rango completo.

### 3.2 Regulación de estados

Se tiene un diagrama de bloques del regulador de estados, de la siguiente manera: [11][12]



**Figura 2. Diagrama de bloques para la regulación de estados. [10]**

Una forma simple de llevar los estados del sistema al punto de operación ( $x[k] = 0$ ) es aplicar una entrada proporcional a los estados pero de signo contrario. Esto es, en el lazo cerrado que se observa en la Figura 2 cuando el vector de referencia es cero ( $r[k] = 0$ ) el sistema siempre debe llevar todos los estados a cero.

Se tiene una ley de control para la regulación de estados, de la forma: [12]

$$u[k] = -Kx[k] \quad (3.8)$$

Donde  $K$  es la ganancia de realimentación y es una matriz del número de entradas por el número de estados, por ejemplo, si se tiene una representación por Pseudoestados  $K$  es de dimensiones  $l * (l * m + p * n)$ , donde  $l$  es el número de entradas,  $p$  es el número de salidas,  $m$  el orden de los polos del sistema y  $n$  el orden de los ceros del sistema.

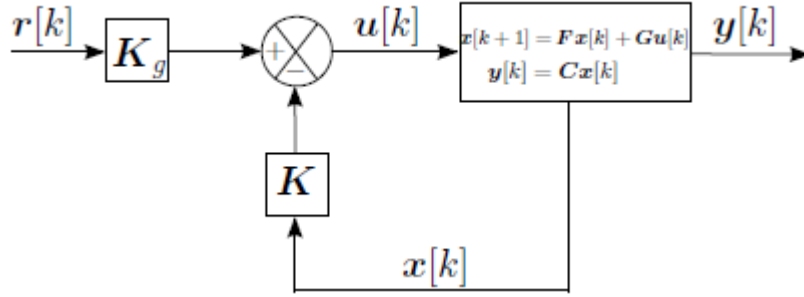
La matriz de ganancia de realimentación  $K$  se puede calcular usando diferentes teorías, pero en este caso se realizara mediante asignación de estructuras propias.

### 3.3 Seguimiento de referencia

Existen dos modelos de seguimiento de referencia para controladores en espacio de estados, donde se debe calcular una ganancia de seguimiento la cual será multiplicada a la referencia del sistema antes de realizar la comparación con los estados multiplicados por la ganancia de regulación.

#### 3.3.1 Seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo

Se muestra en la figura 3 el sistema en lazo cerrado de un controlador con regulación de estados y seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo.



**Figura 3. Diagrama de bloques para el seguimiento de referencia con ganancia en lazo directo. [10]**

La ganancia  $K_g$  es una matriz  $l \times p$ , y se calcula a partir del sistema en lazo cerrado.

Si  $r[k]$  es la referencia deseada, entonces  $e[k] = r[k] - y[k]$  es el error de control. Además, si  $x_{ss}$  son los valores de estado estable del vector de estados cuando  $e[k] = 0$ , y  $u_{ss}$  la entrada de control asociada. El objetivo es ajustar la ley de control en el caso de regulación  $u[k] = -Kx[k]$  para lograr el valor de estado estable deseado de las salidas. Esto es: [10]

$$u[k] = K(x[k] - x_{ss}) + u_{ss} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) trata de restablecer el punto de operación del sistema en lazo cerrado de tal forma que la salida sea igual a la referencia deseada.

De la ecuación (3.9) y (3.5) se tiene que:

$$x[k+1] = Fx[k] + GK(x[k] - x_{ss}) + Gu_{ss} \quad (3.10)$$

Además, sabemos que en estado estable,  $x_{ss} = Fx_{ss} + Gu_{ss}$ ,  $Gu_{ss} = x_{ss} - Fx_{ss}$ , por lo tanto:

$$x[k+1] - x_{ss} = (F - GK)(x[k] - x_{ss}) \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) puede ser vista como una aplicación de regulación de estados con ganancia de realimentación al vector de estados  $x[k] - x_{ss}$ . Se puede notar que si  $x[k] = x_{ss}$ , entonces la salida del sistema es igual a la referencia deseada, es decir,  $y[k] = r[k]$ . Por lo tanto, si se selecciona la ganancia de lazo directo  $K_g$  de una manera apropiada las salidas de la planta convergen a la referencia deseada.

Para encontrar la matriz lazo directo  $K_g$  es necesario observar el sistema en estado estable, esto es:

$$\begin{aligned}x_{ss} &= Fx_{ss} + Gu_{ss} \\y_{ss} &= Cx_{ss}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Y teniendo en cuenta que en estado estable la salida debe ser la salida deseada  $y_{ss} = r[k]$ , podemos reescribir el conjunto de ecuaciones (3.12), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(F - I)x_{ss} + Gu_{ss} &= 0 \\Cx_{ss} &= r[k]\end{aligned}\tag{3.13}$$

Expresando el sistema como una matriz aumentada, de la forma:

$$\begin{bmatrix} F - I & G \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ss} \\ u_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r[k] \end{bmatrix}\tag{3.14}$$

Y suponiendo que la matriz aumentada es una matriz no singular, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{ss} \\ u_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - I & G \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r[k] \end{bmatrix}\tag{3.15}$$

Sustituyendo (3.15) en (3.9) se obtiene la siguiente ley de control:

$$u[k] = -Kx[k] + K_g r[k]\tag{3.16}$$

Donde

$$K_g = [K \quad I] \begin{bmatrix} F - I & G \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\tag{3.17}$$

Para aplicar este tipo de control es necesario que la matriz extendida sea no singular, incluso si la matriz es cercana a no singular la matriz  $K_g$  puede tener valores muy grandes, ocasionando que la señal de control  $u[k]$  pueda llegar a valores de saturación en una implementación real. Además, se debe tener en cuenta en este tipo de control la planta tiene que poseer inherente la acción integral para reducir los errores en estado estacionario debido a que el controlador no posee esta acción.

### 3.3.2 Seguimiento de referencia por acción integral

En la Figura 4 se muestra un diagrama de bloques en lazo cerrado que permite seguir la referencia y además tiene un rechazo a las perturbaciones.

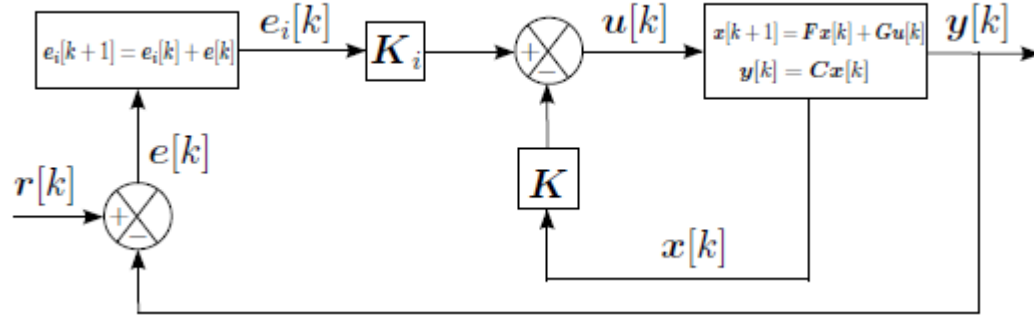


Figura 4. Diagrama de bloques para el seguimiento de referencia con acción integral. [10]

Este tipo de control puede verse como una generalización de la ley de control proporcional e integral (PI). [10] El punto de partida es el de incluir en el vector de estados el vector de los errores de control  $e[k] = r[k] - y[k]$ . Utilizando finalmente la integral del error de control, el cual describe el error acumulado. Denotando el error acumulado como: [10]

$$e_i[k+1] = e_i[k] + e[k] \quad (3.18)$$

El vector de estados aumentado es  $\begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix}$ , por tanto, la ley de control toma la forma de:

$$u[k] = -[K \quad -K_i] \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Donde  $K$  es la ganancia de regulación y  $K_i$  es la ganancia de seguimiento asociada con  $e_i[k]$ .

El modelo de espacio de estados aumentado, es de la forma:

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e_i[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r[k] \quad (3.20)$$

Sustituyendo la ley de control (3.19), se obtiene la ecuación del sistema en lazo cerrado:

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e_i[k+1] \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} F & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} [K \quad -K_i] \right) \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r[k] \quad (3.21)$$

Para determinar la matriz de ganancias  $K_a = [K \quad -K_i]$  se utiliza el método de asignación de estructuras propias de tal modo que el sistema en lazo cerrado tenga una respuesta deseada.

### 3.4 Asignación de estructuras propias

El cálculo de la ganancia de realimentación y la ganancia de realimentación con la ganancia de acción integral, por el método de asignación de estructuras propias permite generar una ley de control que tiene la capacidad de desacoplar el sistema multivariable. [13]

Si se tiene una ley de control de la forma:

$$u[k] = -Kx_a[k] \quad (3.22)$$

Donde  $x_a[k]$  es un vector con los estados del sistema más los errores acumulados de las salidas que se desean controlar.

$$x_a[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ e_i[k] \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

La ecuación en lazo cerrado se define como:

$$x_a[k+1] = (F_a - G_a K)x_a[k] + E_a r[k] \quad (3.24)$$

Donde  $E_a^T = [0 \quad I]$ .

El objetivo es asignar al sistema en lazo cerrado un espectro de valores propios.

$$\sigma(F_a - G_a K) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (3.25)$$

Y un conjunto asociado de vectores propios.

$$v(F_a - G_a K) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad (3.26)$$

Que son seleccionados de tal forma que se puedan obtener las características de respuesta en el tiempo deseadas. Esto es, que los vectores propios del sistema en lazo cerrado están relacionados por la ecuación:

$$[F_a - G_a k]v_i = \lambda_i v_i \quad (3.27)$$

Y esta ecuación puede ser escrita como.

$$[\lambda_i I - F_a \quad G_a] \begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

Donde  $v_i$  es el vector propio asociado a  $\lambda_i$  y

$$u_i = Kv_i \quad (3.29)$$

Esto es

$$K = UV^{-1} \quad (3.30)$$

Donde

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (3.31)$$

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (3.32)$$

# Capítulo 4

## 4. Resultados y Análisis

En esta sección se muestran los resultados de estimación del sistema usando diferentes algoritmos de identificación lineal como se presentan en el capítulo 2. A partir de los parámetros encontrados se realizan representaciones por Pseudoestados de los sistemas de la forma (3.3) y (3.4), para poder construir una serie de controladores multivariables en espacio de estados como se presenta en el capítulo 3.

Manejando inicialmente variables estimadas en tiempo real del péndulo invertido de rotación se diseñan los controladores por espacio de estados a nivel de simulación y encontrando así los parámetros iniciales de funcionamiento de la planta. Con los parámetros iniciales establecidos se procede a realizar el controlador multivariable en tiempo real para la planta multivariable subactuada. En el apéndice B se pueden observar los códigos.

Para probar el desempeño de los controladores se plantea una serie de pruebas, las cuales consisten en llevar el sistema a una referencia específica, tomando el tiempo que tarda el proceso en realizar esta acción y el error en estado estacionario obtenido una vez las salidas estabilicen. Hecho esto se procederá a perturbar el proceso y se tomaran nuevamente las medidas mencionadas. Por último se realizara una comparación con diferentes respuestas de plantas subactuadas de artículos científicos para determinar la eficiencia del sistema controlado en este proyecto.

El procedimiento anterior se realizara con la planta física mostrada en la Figura 5.





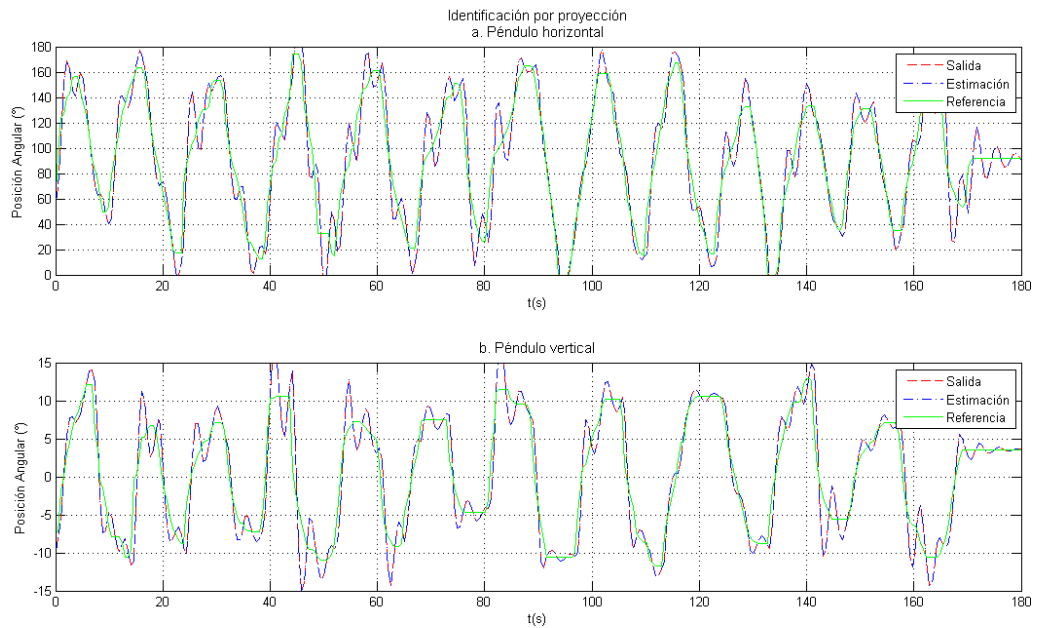
Figura 5. Péndulo invertido rotacional. Fuente: Autor.

#### 4.1 Estimación del sistema y simulación de controladores

Para el péndulo invertido de rotación sus parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  serán estimados de manera experimental con un tiempo de muestreo de 60 [ms] y a su vez cada representación será controlada bajo el mismo tiempo de muestreo.

##### 4.1.1 Identificación por proyección y control en espacio de estados

Introduciendo valores de forma experimental para generar movimientos en todo el rango de operación de la planta, se obtienen una serie de valores de entrada  $u(k)$  y salida  $y(k)$  durante 180 segundos, como se observa en la Figura 6.



**Figura 6. Identificación por proyección. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical.**  
Fuente: Autor.

Como se observa en la Figura 6, la estimación de las salidas de la planta están sobre-puestas sobre las salidas reales a partir de diferentes cambios de referencia y de este modo los valores que se obtuvieron representan la dinámica del sistema multivariable subactuado. A continuación se muestran los datos obtenidos mediante un algoritmo de proyección de la variable  $\hat{\theta}$ :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 1.9709 & -0.0060 \\ -0.0050 & 1.9056 \\ -0.9919 & 0.0060 \\ 0.0046 & -0.9249 \\ -0.0360 & 0.0060 \\ -0.0319 & 0.012 \end{bmatrix} \quad (4.0)$$

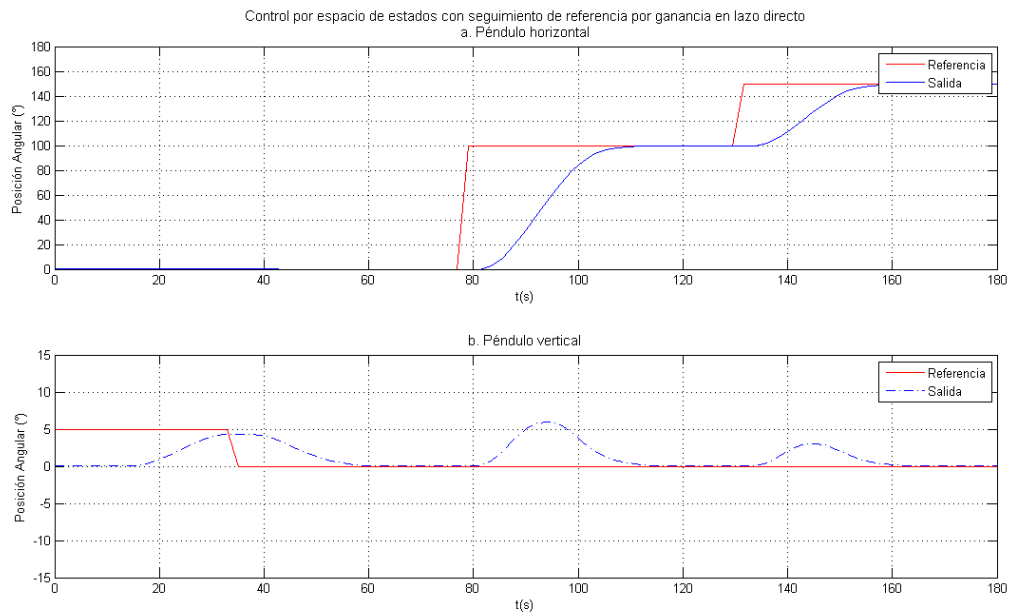
Basado en la ecuación (3.16) se obtuvo una señal de control  $u(t)$  para un control por espacio de estados con seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo, donde los polos deseados utilizados para el cálculo de las ganancias del controlador son los siguientes:

Polos deseados	Valor
$v_1$	0.2
$v_2$	0.3
$v_3$	0.4

$v_4$	0.5
$v_5$	0.6
$v_6$	0.7

**Tabla 1. Polos deseados para el control en espacio de estados con seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo. Fuente: Autor.**

Teniendo en cuenta el polinomio deseado para determinar las ganancias del controlador, se obtuvo una respuesta del sistema de la siguiente manera:



**Figura 7. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor.**

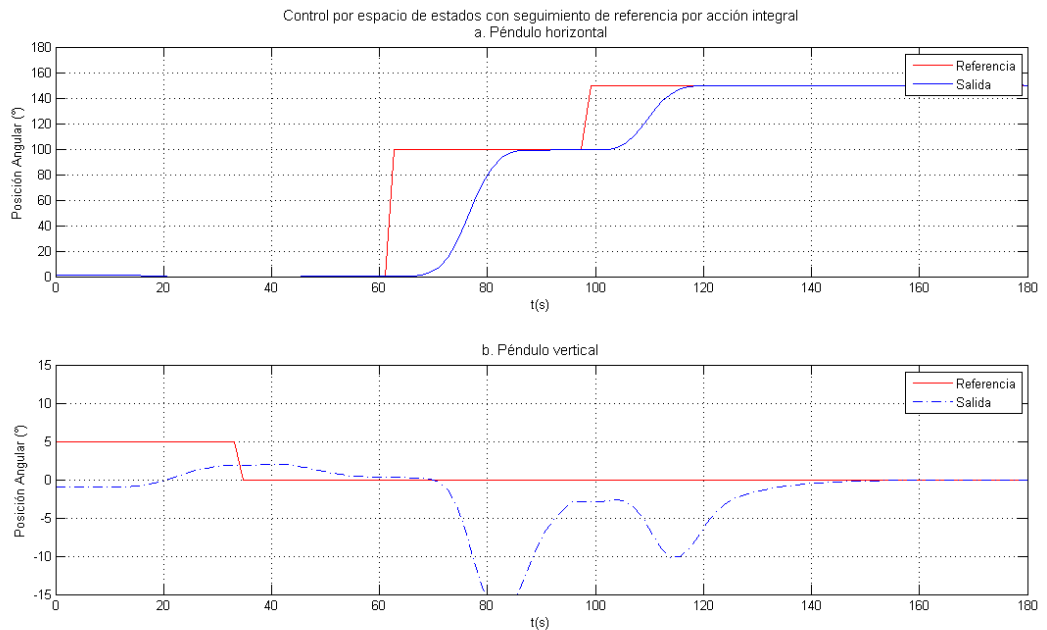
La figura 7 nos muestra el comportamiento de la planta al aplicar la señal de control, donde se puede observar que el cambio de referencias del péndulo horizontal afecta la salida del péndulo vertical produciendo perturbaciones sobre ella, pero el controlador es capaz de llevar nuevamente al estado estable a la salida del péndulo vertical y consigue tener error de estado estacionario cero sobre ambas salidas del sistema multivariable a nivel de simulación.

A continuación se aumenta el sistema a partir de los parámetros estimados mostrados en (4.0) y basado en la ecuación (3.19) se obtuvo una señal de control  $u(t)$  para un control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral, donde los polos deseados utilizados para el cálculo de las ganancias del controlador son los siguientes:

Polos deseados	Valor
$v_1$	0.2
$v_2$	0.3
$v_3$	0.4
$v_4$	0.5
$v_5$	0.6
$v_6$	0.7
$v_7$	0.8
$v_8$	0.85

**Tabla 2. Polos deseados para el control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral. Fuente: Autor**

Teniendo en cuenta el polinomio deseado para determinar las ganancias del controlador, se obtuvo una respuesta del sistema de la siguiente manera:



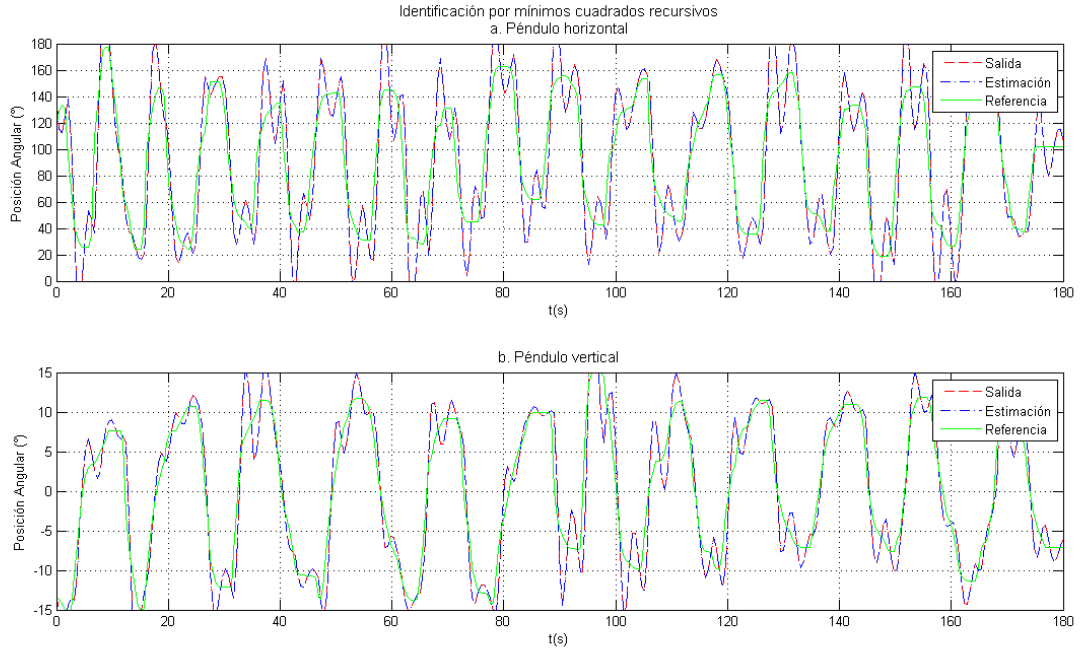
**Figura 8. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor.**

La figura 8 nos muestra el comportamiento del sistema multivariable subactuado controlado bajo un sistema de control con ganancia integral, se puede observar que presenta una respuesta similar a la figura anterior donde el péndulo horizontal logra realizar los cambios de referencia sin tener oscilaciones ni sobrepasos, pero en la respuesta del péndulo vertical se producen unas oscilaciones las cuales en este caso de control aumentan de amplitud pero el controlador nuevamente logra

reducir estas perturbaciones llevando el sistema ha estado estable con errores de estado estacionario de cero a nivel de simulación.

#### 4.1.2 Identificación por MCR y control por espacio de estados

Repitiendo el experimento anterior para la estimación del sistema multivariable subactuado, se observa en la Figura 9 el comportamiento de la identificación por mínimos cuadrados recursivos para la planta.

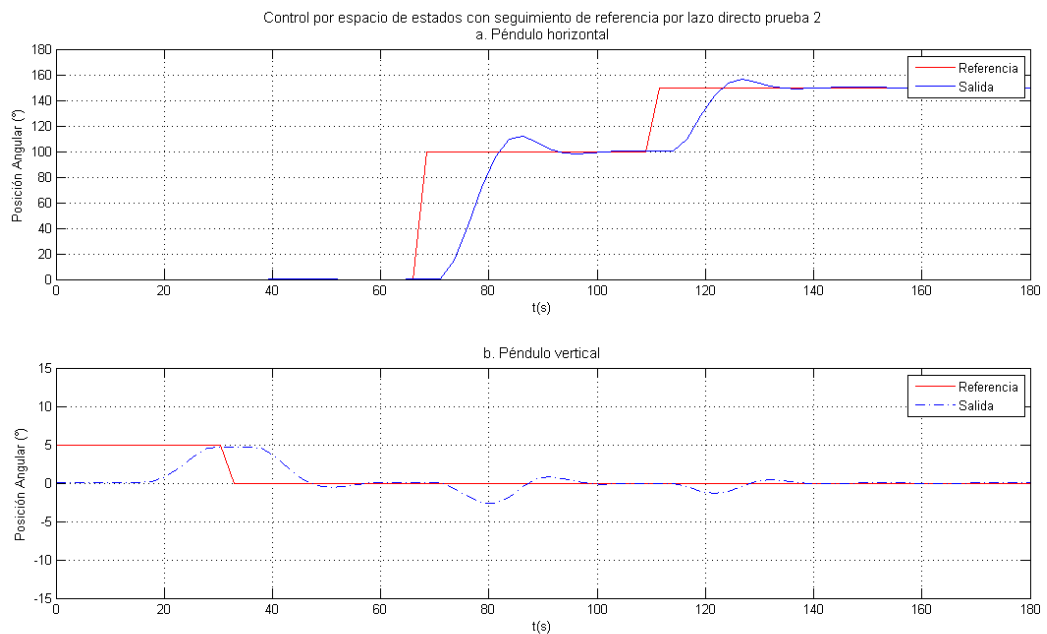


**Figura 9. Identificación por mínimos cuadrados recursivos. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor.**

Como se observa en la Figura 9, nuevamente el algoritmo de estimación utilizado logra que las salidas estimadas de la planta estén sobre-puestas sobre las salidas reales a partir de diferentes cambios de referencia y de este modo los valores que se obtuvieron representan la dinámica del sistema multivariable subactuado. A continuación se muestran los datos obtenidos mediante un algoritmo de MCR de la variable  $\hat{\theta}$ :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 1.8009 & -0.0058 \\ -0.0024 & 1.6346 \\ -0.9999 & 0.0069 \\ 0.0056 & -0.9259 \\ -0.030 & 0.0076 \\ -0.0316 & 0.0122 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Utilizando los parámetros encontrados en la ecuación (4.1) y utilizando la ecuación (3.16) se obtiene nuevamente una señal de control  $u(t)$  para un control por espacio de estados con seguimiento de referencia por ganancia en lazo directo, donde los polos deseados utilizados para el cálculo de las ganancias del controlador son idénticos a los de la Tabla 1, obteniendo así una respuesta del sistema de la siguiente manera:

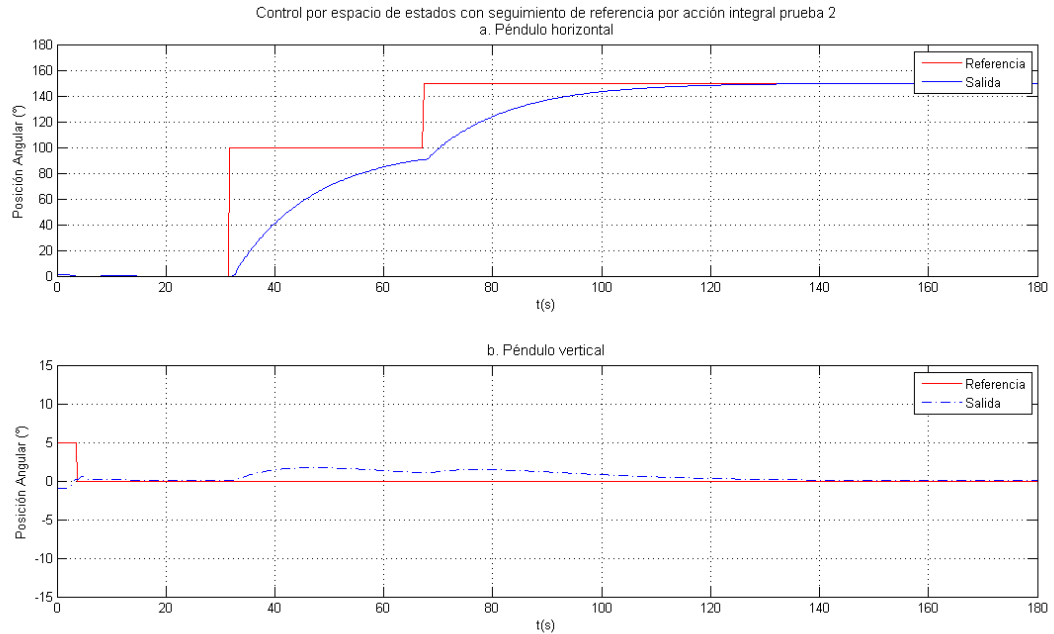


**Figura 10. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral prueba 2. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor.**

En la Figura 10 se puede observar como las salidas logran llegar a la referencia, en este caso disminuyendo oscilaciones en el péndulo vertical pero se afecta ligeramente la respuesta del péndulo horizontal donde se producen máximos sobrepasos los cuales son reducidos rápidamente y el controlador nuevamente es capaz de llevar a estado estable el sistema con errores en estado estacionario de cero a nivel de simulación.

Nuevamente se debe aumentar el sistema a partir de los parámetros estimados mostrados en (4.1), y basado en la ecuación (3.19) poder obtener una señal de control  $u(t)$  para un control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral, donde los polos deseados utilizados para el cálculo de las

ganancias del controlador son los mostrados en la Tabla 2 y de esta manera se tiene un comportamiento de la planta así:



**Figura 11. Control por espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral prueba 2. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor.**

En la Figura 11 se muestran las salidas controladas del sistema, donde se observa que existe una perturbación en la salida del péndulo vertical debido al cambio de referencia de la salida del péndulo horizontal, en este caso de control la perturbación es menor que la mostrada en las Figuras 7, 8 y 9 pero las respuestas tardan mucho mas en llegar a un estado estable con error de estado estacionario de cero.

## 4.2 Identificación por Mínimos Cuadrados Recursivos y control en espacio de estados en tiempo real

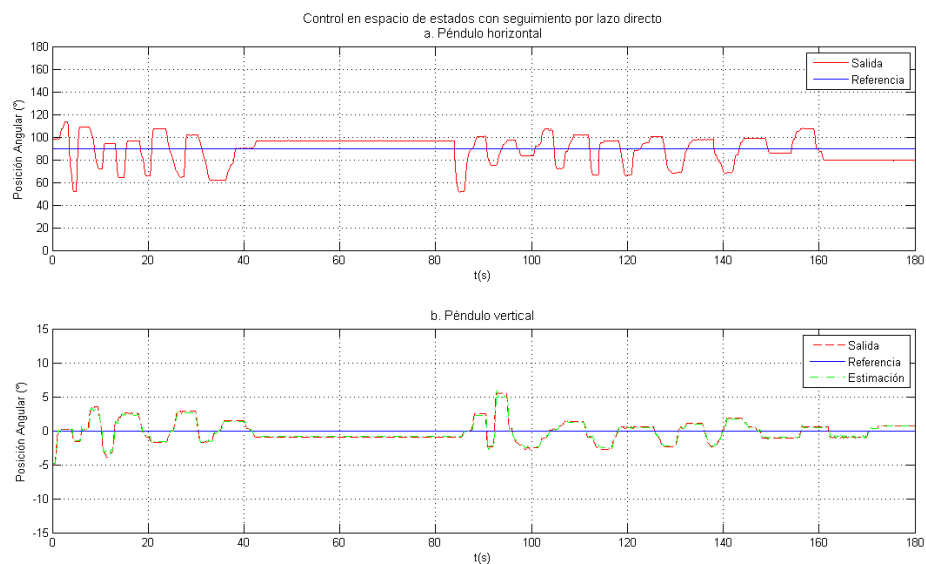
En esta subsección se utilizan los valores de la ecuación (4.1) como los valores iniciales del algoritmo de MCR, y se implementan los controladores en espacio de estados de forma recursiva.

Primero se realiza el diseño del controlador en espacio de estados con seguimiento de referencia por lazo directo, donde se debe tener en cuenta que el valor de los polos deseados cambia debido a su rápida respuesta en tiempo real:

Polos deseados	Valor
$v_1$	0.10
$v_2$	0.11
$v_3$	0.12
$v_4$	0.13
$v_5$	0.14
$v_6$	0.15

**Tabla 3. Polos deseados para el controlador en espacio de estados con seguimiento por lazo directo en tiempo real. Fuente: Autor.**

Las salidas del sistema multivariable subactuado al aplicar el controlador en espacio de estados con seguimiento por lazo directo están representadas por la siguiente Figura:



**Figura 12. Respuesta en tiempo real del sistema multivariable subactuado con control en espacio de estados con seguimiento por lazo directo. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor.**

La Figura 12 nos muestra la respuesta en tiempo real del sistema multivariable subactuado, donde se observa un seguimiento de referencia en ambas salidas las cuales logran llegar a un estado estable con errores de estado estacionario pequeños teniendo en cuenta el fuerte acople interno que presenta la planta, el tiempo de respuesta es de 40 [s] para las salidas de la planta y se puede determinar que así las gráficas presenten oscilaciones al añadir perturbaciones externas la señal de control es capaz de estabilizar el sistema nuevamente.



A continuación se presentan las pruebas realizadas para aceptar el comportamiento del sistema controlado, donde se aplica una referencia deseada y al encontrar la estabilidad del sistema es aplicada una perturbación externa sobre el péndulo vertical.

Sistema multivariable subactuado			Posición angular (Péndulo horizontal)	Posición angular (Péndulo vertical)	Tiempo de respuesta
Prueba 1	Referencia	90°, 0°	89°	-0.9°	40 s
	Perturbación		79°	0.5°	80 s
Prueba 2	Referencia	90°, 0°	93°	0.7°	30 s
	Perturbación		85°	0.4°	60 s

**Tabla 4. Pruebas control en espacio de estados con seguimiento de referencia por lazo directo. Fuente: Autor.**

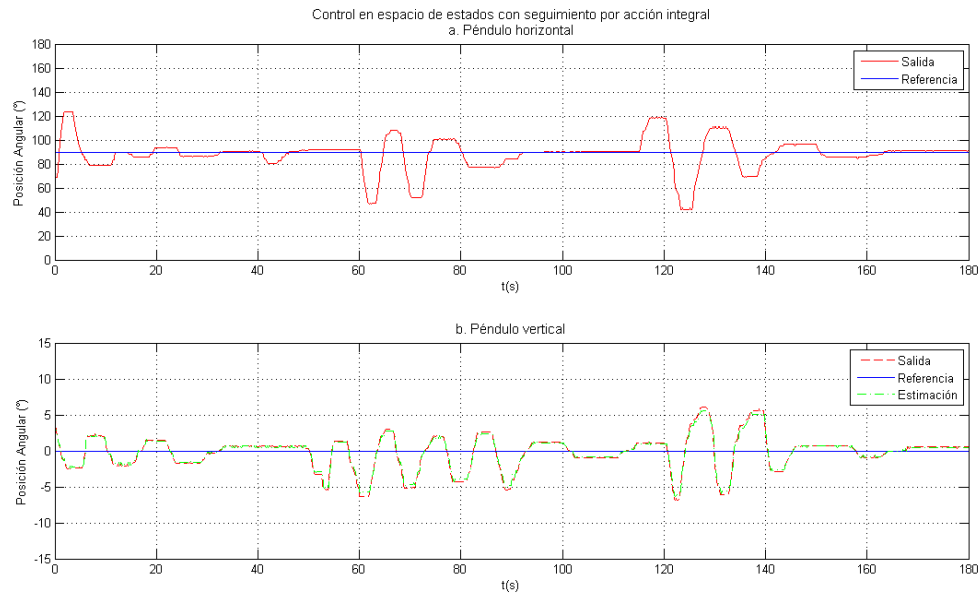
Los datos consignados en la tabla 4 reflejan un funcionamiento aceptable en el sistema multivariable subactuado debido a sus tiempos de respuesta rápidos y que posee un error en estado estacionario pequeño dado el fuerte acople de la planta.

Para el segundo controlador en espacio de estados diseñado se utilizaron unos polos deseados los cuales se presentan en la tabla 5.

Polos deseados	Valor
$v_1$	0.12
$v_2$	0.15
$v_3$	0.20
$v_4$	0.25
$v_5$	0.29
$v_6$	0.30
$v_7$	0.31
$v_8$	0.32

**Tabla 5. Polos deseados para el control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral. Fuente: Autor.**

A continuación se muestran las respuestas del sistema al aplicar un controlador en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral.



**Figura 13. Respuesta en tiempo real del sistema multivariable subactuado con control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. Fuente: Autor.**

Como se observa en la Figura 13, el controlador permite llevar las salidas del sistema a una referencia deseada con menos oscilaciones que las mostradas en la figura 12. El sistema logra llegar a la estabilidad en un tiempo de 35 [s] y a los 45 segundos, se perturbo el péndulo vertical con una fuerza externa donde se observa que el controlador es robusto y logra estabilizar nuevamente la planta.

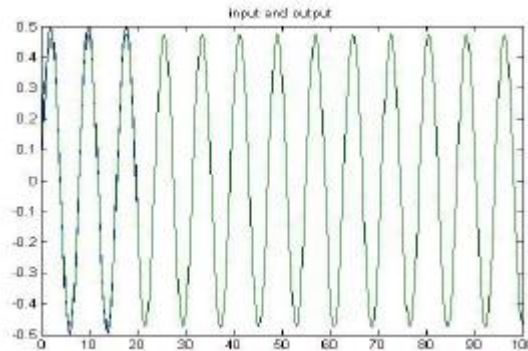
La tabla siguiente muestra los datos obtenidos al aplicar el controlador sobre el sistema, donde al igual que en la tabla 5 el tiempo mostrado es el periodo que tardaron ambas salidas en estabilizarse. Como se puede observar los errores en estado estacionario y los tiempos de establecimiento son menores que los presentados por el anterior controlador consignados en la tabla 5.

Sistema multivariable subactuado		Posición angular (Referencia Péndulo horizontal)	Posición angular (Referencia Péndulo Vertical)	Posición angular (Salida Péndulo horizontal)	Posición angular (Salida Péndulo vertical)	Tiempo de respuesta
Prueba 1	Referencia	90°	0°	90.4°	0.5°	35 s.
	perturbación			90.1°	-1.05°	40 s
Prueba 2	Referencia	90°	0°	90.7°	0.6°	30 s
	perturbación			90.2°	-0.3°	32 s

**Tabla 6. Pruebas control en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral. Fuente: Autor.**

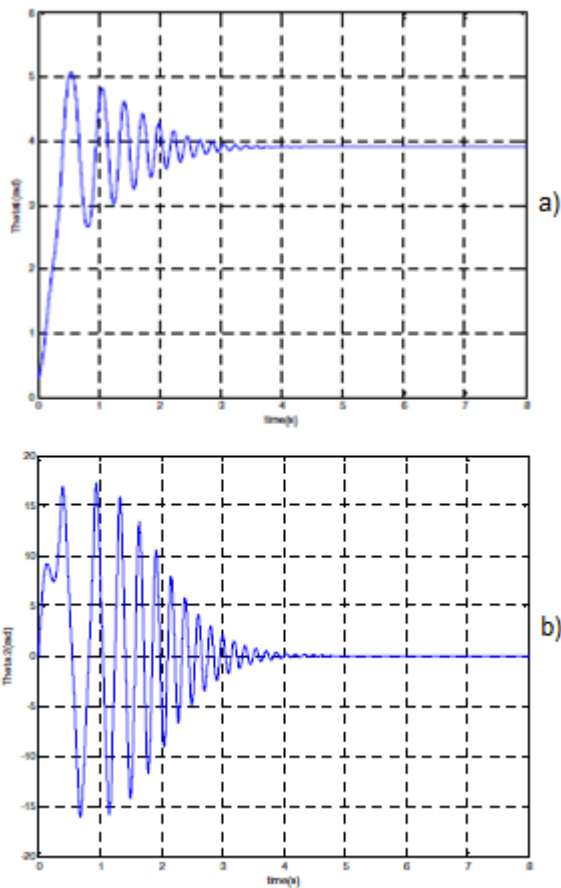
### 4.3 Validación de resultados

En esta subsección se pretende comparar los resultados obtenidos en este trabajo con controladores diseñados para un péndulo invertido de rotación publicados en revistas científicas. [14][15][16][17]



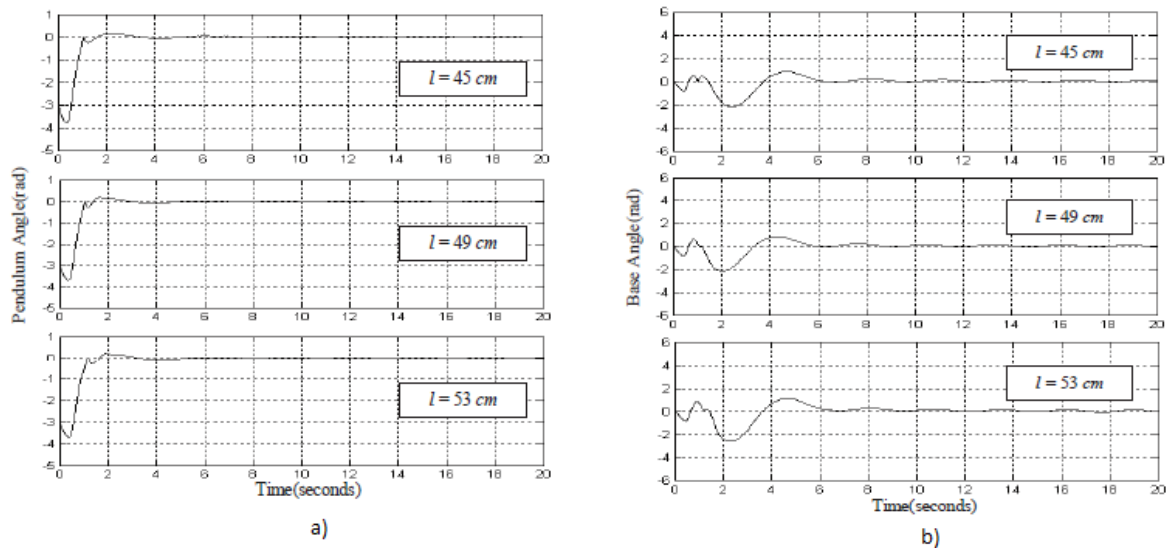
**Figura 14. Control Fuzzy sobre el péndulo invertido rotacional. [14]**

En la Figura 14, se observa la respuesta simulada del péndulo vertical del sistema al aplicar un controlador Fuzzy. Se puede visualizar que la salida del sistema logra seguir la referencia deseada, en tiempos de establecimiento rápidos con errores en estado estacionario de cero. Pero en este caso el controlador es diseñado a partir de un modelamiento matemático fijo del sistema, donde se debe tener en cuenta que no es tan robusto ante perturbaciones externas que puedan ser aplicadas sobre la salida controlada.



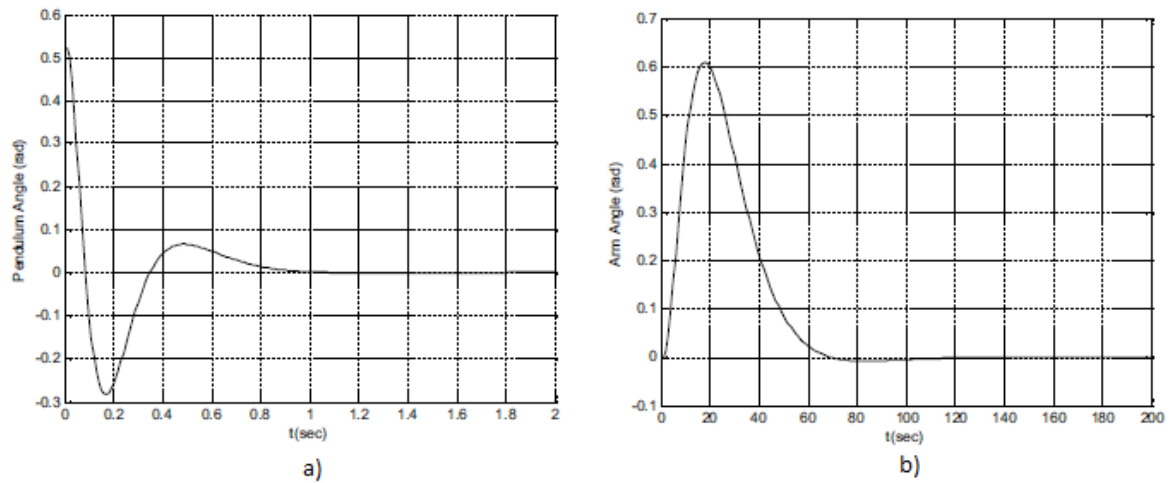
**Figura 15. Control híbrido para un péndulo rotacional. a) Péndulo horizontal. b) Péndulo vertical. [15]**

En la Figura 15 se muestra un controlador híbrido simulado por redes neuronales mas PID, donde se observa que las salidas del sistema multivariable subactuado logran llegar a las referencias deseadas pero presenta oscilaciones en ambas salidas controladas. En comparación con las respuestas simuladas por controladores adaptativos en espacio de estados presentadas en las Figuras 7, 8, 10 y 11 tenemos que las oscilaciones son menores a la hora de seguir la referencia en ambas salidas pero se tiene un tiempo de establecimiento más lento respecto al presentado en la Figura 15.



**Figura 16. Control híbrido aplicado a un sistema de péndulo invertido rotacional. a) Ángulo del péndulo. b) Ángulo de la base. [16]**

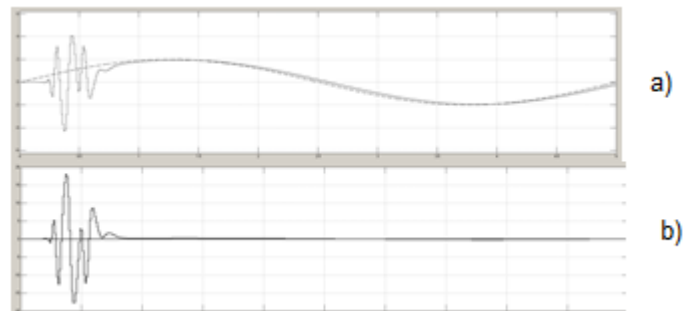
En la Figura 16, observamos el comportamiento del sistema del péndulo rotacional al aplicar un controlador híbrido el cual consta de un componente que realiza el swing-up y un proceso de control en espacio de estados con seguimiento por acción integral. En las graficas que corresponden a las salidas del sistema del péndulo con un controlador híbrido en lazo cerrado se puede decir que poseen un mejor comportamiento que las presentadas en las Figuras 7, 8, 10 y 11 dado que tiene un tiempo de establecimiento mucho menor y unas oscilaciones menores en la respuesta del sistema multivariable, pero es diseñado bajo un modelo matemático fijo el cual resulta limitar a ciertas condiciones el funcionamiento de la planta. Teniendo en cuenta las graficas a y b de la Figura 16, se muestran unas distintas longitudes para el péndulo donde el autor valida el resultado del controlador al cambiar el tamaño del péndulo para determinar así la poca dependencia del modelo matemático. Pero no solo el tamaño del péndulo influye en el modelo matemático fijo, se deben tener en cuenta perturbaciones externas las cuales puedan afectar las salidas del sistema multivariable, por lo que se necesita un modelo autoajutable el cual sea capaz de recalcular todas las ganancias del controlador a medida que varían sus parámetros durante el tiempo de funcionamiento.



**Figura 17. Modelo robusto de control predictivo para el sistema de péndulo invertido de rotación. a) Angulo del péndulo. b) Angulo de la base. [17]**

En la Figura 17, observamos las respuestas del sistema multivariable controlado utilizando una estrategia de control robusta por  $H_\infty$ , se puede observar que ambas salidas logran llegar a la referencia deseada presentando máximo sobrepaso. Se puede determinar al comprar la Figura 17 con respecto a las Figuras 7, 8, 9 y 10 que el controlador diseñado en este artículo logra resolver el problema de seguimiento de referencia en el sistema multivariable, pero aumenta el tiempo de establecimiento del sistema acoplado dado que en la grafica b de la Figura 17 necesita mas de 60 segundos para llegar a la estabilidad.

Como paso seguido en esta subsección de resultados, se hizo una validación del controlador adaptativo en espacio de estados sobre otro sistema multivariable subactuado llamado puente de grúa proporcionado por el fabricante “feedback instruments limited”. [18]



**Figura 18 Control adaptativo por realimentación de estados de un puente de grúa. a) Carro transversal. b) Péndulo. [18]**



La Figura 18 muestra las salidas controladas del sistema multivariable subactuado, donde podemos observar que el sistema logra llegar a la referencia deseada en un tiempo de 0.5 segundos con error en estado estacionario de cero. El autor mediante este artículo científico logro mostrar la eficiencia del controlador en espacio de estados con seguimiento de referencia por lazo directo sobre un sistema diferente al utilizado para el desarrollo de este trabajo dado que elimina las oscilaciones en un tiempo bastante rápido para ambas salidas, además de que demuestra que el algoritmo diseñado no presenta un costo computacional alto dado que funciona sobre diferentes modelos sin importar que tan fuertes puedan ser sus acoples internos.



## CONCLUSIONES

- Para la identificación de los parámetros del sistema se debe tener en cuenta que las señales deben presentar el menor ruido posible y que durante la prueba de identificación deben moverse las salidas del sistema alrededor de todo su rango de operación, con el fin de adquirir toda la dinámica que el sistema pueda presentar.
- Las dos técnicas de identificación lineal entregan modelos aceptados mediante los cuales se puede garantizar una parametrización adecuada del sistema real. Cada método logró que los controladores en espacio de estados diseñados a partir de los parámetros de la planta entregados, fueran es capaz de llevar el sistema a una estabilidad sin importar cuál sea el método de identificación.
- El controlador en espacio de estados con seguimiento de referencia por lazo directo, logra llevar al sistema ha estado estable sin importar que tan fuerte son los acoples internos presente en el modelo multivariable subactuado o si se adicionan perturbaciones externas.
- El controlador en espacio de estados con seguimiento de referencia por acción integral logra seguir las referencias con menor oscilación y por ende consigue el estado estable del sistema en menor tiempo de establecimiento, además también es robusto ante perturbaciones externas reduciendo estas en menor tiempo que el controlador anteriormente mencionado.
- El costo computacional de los controladores en espacio de estados adaptativos diseñados es aceptable, dado que al aplicar dos diferentes modelos de sistemas multivariables subactuados respondió entregando las salidas controladas en un tiempo real.

## Apéndice A

### Modelo DARMA (Modelos Autorregresivos de Movilidad Media Determinística):

Se tiene un modelo en el cual el vector de salida actual esta expresado en una combinación lineal de salidas pasadas  $y(t)$ , y entradas pasadas  $u(t)$  de la siguiente manera: [8]

$$A_0 y(t) = -\sum_{j=1}^{n_1} A_j y(t-j) + \sum_{j=0}^{m_1} B_j u(t-j-d); \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

Donde  $A_0$  es cuadrada y no singular,  $d$  representa un tiempo de retardo y las dimensiones de  $y(t)$  y  $u(t)$  son  $n$  y  $m$ , respectivamente.

Los términos en valores pasados de la salida  $y(t)$  son el componente autoregresivo y los términos en valores pasados de  $u(t)$  son el componente de media móvil.

Usando  $q^{-1}$  como el operador hacia atrás, podemos expresar el modelo como:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t); \quad t \geq 0 \quad (5.2)$$

Donde

$$A(q^{-1}) = A_0 + A_1 q^{-1} + \dots + A_{n_1} q^{-n_1}; \quad A_0 \text{ no singular} \quad (5.3)$$

$$B(q^{-1}) = (B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{m_1} q^{-m_1}) q^{-d} \quad (5.4)$$

En particular, un modelo DARMA es equivalente a un modelo de espacio de estados observable con estado inicial arbitrario, que puede describir las propiedades de entrada salida de un modelo general de espacio de estados el cual no es necesariamente completamente observable o completamente controlable.

El modelo representado en (5.1) puede ser normalizado de modo que  $A_0 = I$  multiplicando ambos lados por  $A_0^{-1}$ , de esta forma el modelo puede ser expresado como:

$$y(t) = \theta_0^T \phi(t-1); \quad t \geq 0 \quad (5.5)$$

Donde  $\theta_0^T$  es una matriz  $m \times p$  de parámetros en  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$ , y  $\phi(t)$  es un vector  $p \times 1$  que contiene los valores pasados de las salidas y entradas.

## Apéndice B

### Códigos

```
% Identificación del sistema usando proyección
```

```
phi=[-X_1 -X_2 -X_3 U_1 U_2 U_3];  
Xe=phi*theta';  
s=phi*phi';  
s2= phi;  
theta=theta+s2'/(1+s(1,1))*(X-Xe(1,1));
```

```
% Identificación del sistema usando mínimos cuadrados recursivos.
```

```
phi=[-X_1 -X_2 -X_3 U_1 U_2 U_3];  
Xe=phi*theta';  
s=phi*PK*phi';  
s1=PK*phi';  
s2=s1(1:6,1);  
theta=theta+s2'/(1+s(1,1))*(X-Xe(1,1));  
PK=PK-PK*phi'*phi*PK/(1+s(1,1));
```

```
%Control por lazo directo
```

```
F=[-A_{1} -A_{2} B1 B2;  
eye(p,p),zeros(p,p),zeros(p,q),zeros(p,q);  
zeros(q,p),zeros(q,p),zeros(q,q), zeros(q,q);  
zeros(q,p),zeros(q,p),eye(q,q), zeros(q,q);]  
G=[zeros(2*p,q);  
eye(q,q);  
zeros(q,q)]  
C=[-A_{1} -A_{2} B1 B2];  
K=place(F,G,[0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7])  
Kg=pinv(C*(inv(eye(6)-F+G*K)*G))
```

## **Apéndice C**

### **Relación de Artículos**

#### **Artículos en revistas:**

“Identificación por filtros de kalman y control adaptativo por realimentación de estados de un puente de grúa”. Revista: Tecnologías de avanzada. Fecha: 2016.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Jiang, Z. P. Lefeber, E. Nijmeijer, H. Saturated stabilization and tracking of a nonholonomic mobile robot. Syst & Control Lett. 42, 327-332 2001.
- [2] Jiang, Z. P. Controlling underactuated mechanical system: A Review and open problems. IEEE Xplore.
- [3] Mu, H. Xian, B. Chen, D. Kaitan, Y. Yu, F. Adaptive tracking control of underactuated quadrotor unmanned aerial vehicles via backstepping. Baltimore, USA 2010.
- [4] Moore, J. Tendrake, R. Adaptive control design for underactuated systems using sums-of-squares optimization, IEEE Xplore, Oregon, 2014.
- [5] Giraldo, E. Montoya, O. Valenzuela, J. Control global de un péndulo rotacional invertido empleando modelos de energía. (2012) Scientia et Technica Año XVII, no 52. Universidad Tecnológica de Pereira ISSN 0122-1701.
- [6] Rodríguez Ramírez, D. Bordons Alba, C. Apuntes de ingeniería de control. {En línea}. {02 de mayo de 2018}. Disponible en: (<http://www.esi2.us.es/~danirr/apuntesIC4.pdf>).
- [7] Escobar Dávila, L. Montoya Giraldo, O. Control híbrido del péndulo de Furuta. Pereira, Colombia. 2012. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de ingeniero(a) Electricista.
- [8] Goodwin, G. Sin, K. Adaptive filtering prediction and control. First edition. New Jersey: Prentice Hall, 1984. 535 p.
- [9] Ai-Guo, W. Shi-Wei, L. Rui-Qi, D. Latest-Estimation based hierarchical recursive extended least squares algorithm for ARMAX model. Scientia et Technica, China. June 2016.
- [10] Hernández Jiménez, J. Rodríguez Ríos, J. Desarrollo de una metodología para la identificación y control adaptativo por Pseudoestados de un sistema multivariable acoplado aplicado a un TRMS. Pereira, Colombia. 2014. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de Ingeniero (a) Electricista.

- [11] Albertos, P. Sala, A. Multivariable control systems: An engineering approach. First edition. Springer, 2003. 358 p.
- [12] Albarracín Ávila, Danna Lisseth. Control óptimo de un sistema multi-variable aplicado a un generador eólico conectado a un sistema de potencia. Pereira, Colombia. 2015. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de magister en ingeniería eléctrica.
- [13] Guoping P, L. Ron, P. Eigenstructure assignment for control system design. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [14] Eini, R. Abdelwahed, S. Indirect adaptive fuzzy controller design for a rotational inverted pendulum. IEEE Xplore. June 2018.
- [15] Shojaei, A. Othman, M. Rahmani, R. Rani, M. A hybrid control scheme for a rotational inverted pendulum. 2011 UKSim 5<sup>th</sup> European symposium on computer modeling and simulation.
- [16] Benjanarasuth, T. Nundrakwang, S. Hybrid controller for rotational inverted pendulum systems. 2008 SICE annual Conference, The university Electro-Communications, Japan.
- [17] Ghanavati, M. Mobayen, S. Majd, V. A new robust model predictive control strategy for rotational inverted pendulum system. 2011 International Siberian Conference on Control and Communications SIBCON.
- [18] Giraldo Suarez. E. Muñoz Gutiérrez, P. Ardila Lindo, V. Identificación por filtros de Kalman y control adaptativo por realimentación de estados de un puente de grúa. Revista tecnologías de avanzada, 2016.